

- ① a) la retta σ giace per $\acute{o}$ nel piano $\pi' \parallel \pi$ e passante per P ;
 π' ha equazione $3x - y + z + c = 0$ tale che $3 - 2 + 3 + c = 0$
 da cui $c = -4$, con cui si ottiene $3x - y + z - 4 = 0$.

Per $\acute{o}$ σ passa per P e per $Q = \pi' \cap \alpha$:
$$\begin{cases} 3x - y + z - 4 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \\ 3x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{cio\`e}$$

$$\begin{cases} x = 2 - z \\ y + z + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{cio\`e}$$

$$\begin{cases} x = 2 - z \\ y = -1 - z \\ 3(2 - z) - 2(-1 - z) - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3z + 2 + 2z - 5 = 0$$

da cui $\begin{cases} z = 3 \\ y = -4 \\ x = -1 \end{cases}$ cio\`e $Q = (-1, -4, 3)$. la direzione di

σ \`e data pertanto dal vettore $P - Q = (2, 6, 0)$, per $\acute{o}$ otteniamo
 equazioni parametriche per σ
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b) la direzione di α \`e data dal vettore  $(1, 0, 1) \times (3, -2, 0)$  cio\`e
 $\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (2, 3, -2)$; otteniamo per $\acute{o}$

$$|(1, 3, 0) \cdot (2, 3, -2)| = \sqrt{1+3^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2+2^2} \cos \hat{\alpha} \quad \text{dunque}$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{11}{\sqrt{170}}$$

- c) Poich\`e $\sigma \parallel \pi$, $\underline{d(\sigma, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3 - 2 + 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{11}}}$

- ② Innanzi tutto la curva di livello zero deve passare per $(1, 1)$,
 per $\acute{o}$ $0 = f(1, 1) = a + b - 1 - 5$ cio\`e $\underline{a + b = 6}$.

Poi la retta $x + y - 2 = 0$, che ha direzione $\vec{v} = (1, -1)$, risulta
 tangente alla curva di livello esattamente quando \`e
 normale al gradiente, per $\acute{o}$ deve essere

$$0 = (1, -1) \cdot \nabla f(1, 1) = (1, -1) \cdot (2ax - y, 2by - x) \Big|_{(1, 1)} =$$

$$= (1, -1) \cdot (2a - 1, 2b - 1) = 2a - 1 - 2b + 1 = 2(a - b).$$

Per $\acute{o}$ $\underline{a - b = 0}$. Si conclude dunque che $\underline{a = b = 3}$.

③ $z = f(x, y) = x - \frac{1}{y} + \frac{x}{y}$ ha dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{ \text{asse delle } x \}$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y} = \frac{y+1}{y}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^2} = \frac{1-x}{y^2}$

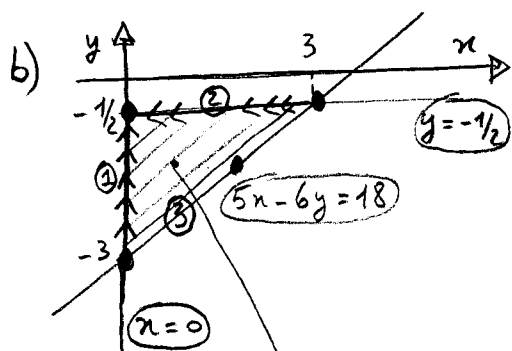
Perciò $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 1-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$; $P_0 = (1, -1)$ è

pertanto l'unico punto critico.

Si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x-1)}{y^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}$ con

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1/y^2 \\ -1/y^2 & 2(x-1)/y^3 \end{pmatrix}$; in particolare $H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

ha determinante $-1 \neq 0$, ed è indefinita. P_0 è dunque un punto di sella.



I punti notevoli sono:

$$\begin{cases} 5x-6y=18 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-6y=18 \\ y=-1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3=18 \\ y=-1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1/2 \end{cases}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq -1/2, 5x-6y \leq 18\}$$

Con $\partial D = ① \cup ② \cup ③$. Studiamo $f|_{\partial D}$, ricercando i punti critici.

$f|_{①} \begin{cases} z = -1/y \\ x=0, -3 \leq y \leq -1/2 \end{cases}$

$z' = \frac{1}{y^2} > 0$, $z = z(y)$ è crescente

$f(0, -3) = z(-3) = 1/3$

$f(0, -1/2) = z(-1/2) = 2$

$f|_{②} \begin{cases} z = 2-x \\ y=-1/2, 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$z' = -1 < 0$, $z = z(x)$ è decrescente

MIN

$f(3, -1/2) = z(3) = -1$

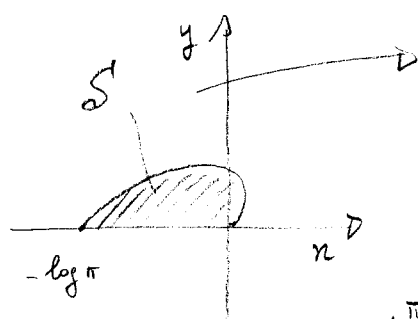


$f|_{③} \begin{cases} \det \begin{pmatrix} \frac{y+1}{y} & \frac{1-x}{y^2} \\ \frac{y+1}{y} & \frac{1-x}{y^2} \end{pmatrix} = 0 \\ 5x-6y=18 \\ -3 \leq y \leq -1/2 \end{cases}$

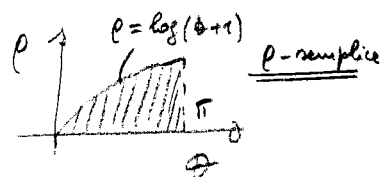
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y(y+1)+5(1-x)=0 \\ 5x=6y+18 \\ -3 \leq y \leq -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y^2=13 \\ 5x=6y+18 \\ -3 \leq y \leq -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{13}/6 \\ x=\frac{6y+18}{5} \end{cases}$

$f(\frac{18-\sqrt{6}\sqrt{13}}{5}, -\sqrt{13}/6) = \frac{12}{5} + 2\sqrt{6/13}$ MAX

④



$$S' \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq \log(\theta+1) \end{cases}$$



Area di $S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \rho d\theta d\rho =$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^{\log(\theta+1)} \rho d\rho = \int_0^\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\log(\theta+1)} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \log^2(\theta+1) d\theta ; \text{ calcoliamo a parte una primitiva di } \log^2(\theta+1)$$

$$\int \log^2 t dt \stackrel{P.P.}{=} t \log^2 t - \int t \cdot \frac{2 \log t}{t} dt = t \log^2 t - 2 \int \log t dt \stackrel{P.P.}{=} t \log^2 t - 2 t \log t +$$

$$+ 2 \int t \cdot \frac{1}{t} dt = t \log^2 t - 2 t \log t + 2t = t (\log^2 t - 2 \log t + 2) - \text{Peru'}$$

$$\text{Area di } S = \frac{1}{2} \left[(\theta+1) (\log^2(\theta+1) - 2 \log(\theta+1) + 2) \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left[(\pi+1) (\log^2(\pi+1) - 2 \log(\pi+1) + 2) - 2 \right]$$

$$= \frac{\pi+1}{2} (\log^2(\pi+1) - 2 \log(\pi+1)) + \pi$$

⑤

la trasformazione $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \\ z = z \end{cases}$ ha inverse $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \\ z = z \end{cases}$ e matrice

Jacobiana $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante -2 .

Il solido V nello spazio coordinato xyz si trasforma nel solido V' nello spazio coordinato uvw con definito:

$$V' = \left\{ (u,v,z) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in [0,1], v \in [-1,1], z \in [0, u e^{uv}] \right\}.$$

Peru' $\iiint_V dx dy dz = \iiint_{V'} \frac{1}{\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)} \right|} du dv dz =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 du \int_{-1}^1 dv \int_0^{u e^{uv}} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 du \int_{-1}^1 u e^{uv} dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[e^{uv} \right]_{-1}^1 du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^u - e^{-u}) du = \frac{1}{2} \left[e^u + e^{-u} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e + e^{-1} + 2) = \frac{e + e^{-1}}{2} + 1.$$

⑥ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt[n]{e}-1)^{3/2}}{n \sin(1/n^2)}$ è a termini $a_n = \frac{1/n (\sqrt[n]{e}-1)^{3/2}}{\sin(1/n^2)} \gg 0$, ove rie

il numeratore che il denominatore sono infinitesimi per $n \rightarrow +\infty$.
Per controllare se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesimo e, in caso affermativo, per determinarne l'ordine, occorre studiare separatamente gli ordini di infinitesimo di:

- $\frac{1}{n}$, che è infinitesimo di ordine 1, poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1$

- $\sqrt[n]{e}-1 = e^{1/n}-1$ è infinitesimo, ed il suo ordine è $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha (e^{1/n}-1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t-1}{t^\alpha} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{\alpha t^{\alpha-1}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
perciò $\alpha = 1$.

Se ne deduce che $(\sqrt[n]{e}-1)^{3/2}$ è infinitesimo di ordine $3/2$.

- $\sin(1/n^2)$ è infinitesimo di ordine 2, poiché $\sin 1/n$ è inf. di ordine 1.
Infatti $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin(1/n^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t}{1} = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

In definitiva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesimo di ordine $1 + 3/2 - 2 = 1/2 < 1$, dunque la serie diverge per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^{10} 3^n}{\sqrt{n!}}$ è a termini positivi; inoltre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{10} 3^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(n-1)^{10} 3^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{10} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{n!}{n+1!}} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{n+1}} \quad \text{così che} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1.$$

Perciò la serie converge per il criterio del rapporto.